ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN.

Band 159. № 3803. 11.

Differentialformeln zur Bahnverbesserung bei kleinen Excentricitäten und Neigungen.

Von *Karl Bohlin.*

Indem man die Länge des Knotens einer Bahn in Bezug auf den Aequator mit Ω', die entsprechende Neigung mit i' und ebenso den Abstand des Perihels vom Knoten mit ω' bezeichnet, lassen sich nach Schönfeld*) die folgenden einfachen Formeln aufstellen:

$$\begin{aligned} \sin\gamma\sin(\Gamma-\omega') &= -\sin(\alpha-\Omega') & \sin\gamma'\sin(\Gamma'-\omega') &= -\sin\delta\cos(\alpha-\Omega') \\ \sin\gamma\cos(\Gamma-\omega') &= \cos i'\cos(\alpha-\Omega') & \sin\gamma'\cos(\Gamma'-\omega') &= \cos\delta\sin i'-\sin\delta\cos i'\sin(\alpha-\Omega') \\ \cos\gamma &= -\sin i'\cos(\alpha-\Omega') & \cos\gamma' &= \cos\delta\cos i'+\sin\delta\sin i'\sin(\alpha-\Omega')\ , \end{aligned}$$

welche dazu dienen, die Differentialausdrücke der Rectascension und der Declination vermittelst der Hülfsgrössen γ, Γ, γ', Γ' auf die folgende einfache Form zu bringen:

$$\begin{aligned} \cos\delta\,d\alpha &= \frac{\sin\gamma}{\Delta}\sin(v+\Gamma)\,dr+\frac{r\sin\gamma}{\Delta}\cos(v+\Gamma)\,[du+\cos i\,d\Omega] \\ &\quad -\frac{r\cos\gamma}{\Delta}[\cos u\sin i\,d\Omega-\sin u\,di]\ , \\ d\delta &= \frac{\sin\gamma'}{\Delta}\sin(v+\Gamma')\,dr+\frac{r\sin\gamma'}{\Delta}\cos(v+\Gamma')\,[du+\cos i\,d\Omega] \\ &\quad -\frac{r\cos\gamma'}{\Delta}[\cos u\sin i\,d\Omega-\sin u\,di]\ . \end{aligned} \tag{1}$$

Hier, wie bei den folgenden Entwickelungen, ergeben sich die auf $d\delta$ bezüglichen Ausdrücke aus denjenigen für $\cos\delta\,d\alpha$ einfach durch Vertauschung von γ und Γ mit γ' und Γ'.

Es ist öfters zweckmässig hier neue Bestimmungsstücke einzuführen, wobei man die folgenden wählen kann:

$$\begin{aligned} d\varpi &= d\omega+\cos i\,d\Omega \\ d\varkappa &= \sin\omega\,di-\cos\omega\sin i\,d\Omega \\ d\lambda &= \cos\omega\,di+\sin\omega\sin i\,d\Omega\ . \end{aligned}$$

Man kommt so auf die von Schönfeld angegebene, besonders zweckmässige Form der bezüglichen Differentiale*), die ich als bekannt voraussetze.

Der Fall nun, wo die Neigung oder die Excentricität sehr klein wird, erheischt aber eine besondere Betrachtung, weil die genannten Formeln Schönfeld's in diesem Falle thatsächlich zu unrichtigen Werthen der Unbekannten führen, indem die Correctionen $d\Omega$ und $d\pi$ so gross werden, dass eine Entwickelung nach Potenzen dieser Grössen auch praktisch genommen unzulässig wird. Eine Behandlung dieses Falles für wenig excentrische Bahnen ist in von Oppolzer's Lehrbuch**) angeführt und zwar sind dabei statt e und π die beiden Grössen

$$\Phi=\frac{\sin\varphi}{\sin 1''}\sin\pi\ ;\qquad \Psi=\frac{\sin\varphi}{\sin 1''}\cos\pi$$

eingeführt worden. Die bezüglichen Formeln sind aber dermaassen complicirt, dass man dieselben bei numerischer Rechnung schwerlich anwenden wird. Durch eine andere Wahl der Veränderlichen gelingt es aber weit einfachere Formeln zu erreichen, die hier in Kürze angeführt werden mögen.

Bei einer ausnahmsweise kleinen Neigung setze man:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \mathrm{tg}\,{}^1/_2\,i\cos\Omega \\ \eta_1 &= \mathrm{tg}\,{}^1/_2\,i\sin\Omega\ , \end{aligned} \tag{2}$$

woraus folgt:

$$\cos u\sin i\,d\Omega-\sin u\,di = 2\cos^2{}^1/_2\,i\,[-d\xi_1\sin(v+\pi)+d\eta_1\cos(v+\pi)]$$

und ausserdem noch:

$$\begin{aligned} d\varpi &= du+\cos i\,d\Omega \\ &= d(v+\pi)-(1-\cos i)\,d\Omega \\ &= d(v+\pi)+2\cos^2{}^1/_2\,i\,[-\eta_1\,d\xi_1+\xi_1\,d\eta_1] \end{aligned}$$

*) A. N. Nr. 2693.

**) von Oppolzer, Lehrbuch zur Bahnbestimmung der Cometen und Planeten, zweiter Band, 1880, pag. 388 ff.

Dieses in (1) eingesetzt, ergiebt:

$$\begin{aligned}\cos\delta\, d\alpha = {} & \frac{\sin\gamma}{\Delta}\sin(v+\Gamma)\, dr + \frac{\sin\gamma}{\Delta}\cos(v+\Gamma)\cdot r\, d(v+\pi)\\ & + \left[\frac{\cos\gamma}{\Delta}\frac{r}{a}\sin(v+\pi) + \eta_1\frac{\sin\gamma}{\Delta}\frac{r}{a}\cos(v+\Gamma)\right]\cdot 2\,a\cos^2 {}^1\!/_2\, i\, d\xi_1\\ & - \left[\frac{\cos\gamma}{\Delta}\frac{r}{a}\cos(v+\pi) + \xi_1\frac{\sin\gamma}{\Delta}\frac{r}{a}\cos(v+\Gamma)\right]\cdot 2\,a\cos^2 {}^1\!/_2\, i\, d\eta_1 .\end{aligned}$$

Ist die Excentricität ausnahmsweise klein, so setze man:

$$\xi = \operatorname{tg} {}^1\!/_2\,\varphi\cos\pi \qquad \eta = \operatorname{tg} {}^1\!/_2\,\varphi\sin\pi\ , \tag{3}$$

woraus erhalten wird:

$$\begin{aligned} r\, d(v+\pi) = {} & \left[\cos\varphi\sin(E+\pi) + \cos^2\varphi\sin(v+\pi) + \operatorname{tg} {}^1\!/_2\,\varphi\sin\pi + e^2\sin\pi\sin v\right]\cdot 2\,a\frac{\cos^2 {}^1\!/_2\,\varphi}{\cos\varphi}\, d\xi\\ & + \left[-\cos\varphi\cos(E+\pi) - \cos^2\varphi\cos(v+\pi) - \operatorname{tg} {}^1\!/_2\,\varphi\cos\pi - e^2\cos\pi\sin v\right]\cdot 2\,a\frac{\cos^2 {}^1\!/_2\,\varphi}{\cos\varphi}\, d\eta\\ dr = {} & \left[-\cos(v+\pi) + e^2\cos\pi\cos v\right]\cdot 2\,a\frac{\cos^2 {}^1\!/_2\,\varphi}{\cos\varphi}\, d\xi\\ & + \left[-\sin(v+\pi) + e^2\sin\pi\cos v\right]\cdot 2\,a\frac{\cos^2 {}^1\!/_2\,\varphi}{\cos\varphi}\, d\eta\ .\end{aligned}$$

Die Formeln für $d\alpha$ und $d\delta$ gestalten sich hiernach sowohl einfach wie symmetrisch, indem man nämlich erhält:

$$\begin{aligned}\cos\delta\, d\alpha = {} & \frac{\sin\gamma}{\Delta}\left[\cos(v+\Gamma) + e\cos\Gamma\right]\cdot a\sec\varphi\, dL_0\\ & + \frac{\sin\gamma}{\Delta}\left[(\cos(v+\Gamma) + e\cos\Gamma)(t-t_0) - \frac{2}{3}\frac{\sqrt{p}}{k}\cdot r\sin(v+\Gamma)\right] a\sec\varphi\, d\mu\\ & + \frac{\sin\gamma}{\Delta}\left[\frac{1}{\cos\varphi}\sin(\pi-\Gamma) + \frac{e^2}{\cos\varphi}\cos\pi\sin\Gamma + (\sin(E+\pi) + \eta\sec\varphi)\cos(v+\Gamma)\right]\cdot 2\,a\cos^2 {}^1\!/_2\,\varphi\, d\xi\\ & - \frac{\sin\gamma}{\Delta}\left[\frac{1}{\cos\varphi}\cos(\pi-\Gamma) - \frac{e^2}{\cos\varphi}\sin\pi\sin\Gamma + (\cos(E+\pi) + \xi\sec\varphi)\cos(v+\Gamma)\right]\cdot 2\,a\cos^2 {}^1\!/_2\,\varphi\, d\eta\\ & + \left[\frac{\cos\gamma}{\Delta}\frac{r}{a}\sin(v+\pi) + \eta_1\frac{\sin\gamma}{\Delta}\frac{r}{a}\cos(v+\Gamma)\right]\cdot 2\,a\cos^2 {}^1\!/_2\, i\, d\xi_1\\ & - \left[\frac{\cos\gamma}{\Delta}\frac{r}{a}\cos(v+\pi) + \xi_1\frac{\sin\gamma}{\Delta}\frac{r}{a}\cos(v+\Gamma)\right]\cdot 2\,a\cos^2 {}^1\!/_2\, i\, d\eta_1\\ d\delta = {} & \frac{\sin\gamma'}{\Delta}\left[\cos(v+\Gamma') + e\cos\Gamma'\right]\cdot a\sec\varphi\, dL_0\\ & + \cdots\end{aligned}$$

Führen wir hier Hülfsgrössen ein, so gestaltet sich die Rechnung sehr einfach. Die vollständigen Formeln können zweckmässig folgendermaassen gestaltet werden:

$$\xi = \operatorname{tg} {}^1\!/_2\,\varphi\cos\pi \quad ; \qquad \xi_1 = \operatorname{tg} {}^1\!/_2\, i\cos\Omega$$
$$\eta = \operatorname{tg} {}^1\!/_2\,\varphi\sin\pi \quad ; \qquad \eta_1 = \operatorname{tg} {}^1\!/_2\, i\sin\Omega$$

$$h\sin(H-v) = -e\sin v \quad ; \qquad k\sin(K-v) = -e\sin v\,(t-t_0) + \frac{2}{3}\frac{\sqrt{p}}{k}$$
$$h\cos(H-v) = \frac{p}{r} \quad ; \qquad k\cos(K-v) = \frac{p}{r}\cdot(t-t_0)\ ,$$
$$\left[\log\frac{2}{3k} = 1.5883273\right]$$

$$s\sin S = \sec\varphi\sin\pi \quad ; \qquad c\sin C = -\cos\varphi\sin\pi$$
$$s\cos S = -\cos\varphi\cos\pi \quad ; \qquad c\cos C = \sec\varphi\cos\pi\ ,$$

wo die Hülfsgrössen s, S, c, C den Vorzug darbieten, Constanten zu sein. Die Differentialformeln selbst sind dann:

$$
\begin{aligned}
\cos\delta\,\mathrm{d}\alpha = {} & \frac{\sin\gamma}{\Delta}\cdot h\cos(H+\Gamma)\cdot a\sec\varphi\,\mathrm{d}L_0 \\
& + \frac{\sin\gamma}{\Delta}\cdot k\cos(K+\Gamma)\cdot a\sec\varphi\,\mathrm{d}\mu \\
& + \frac{\sin\gamma}{\Delta}\Big[s\sin(S+\Gamma)+[\sin(E+\pi)+\eta\sec\varphi]\cos(v+\Gamma)\Big]\cdot 2\,a\cos^2{}^1\!/_2\,\varphi\,\mathrm{d}\xi \\
& - \frac{\sin\gamma}{\Delta}\Big[c\cos(C+\Gamma)+[\cos(E+\pi)+\xi\sec\varphi]\cos(v+\Gamma)\Big]\cdot 2\,a\cos^2{}^1\!/_2\,\varphi\,\mathrm{d}\eta \qquad (4) \\
& + \left[\frac{\cos\gamma}{\Delta}\,\frac{r}{a}\sin(v+\pi)+\frac{\sin\gamma}{\Delta}\,\eta_1\,\frac{r}{a}\cos(v+\Gamma)\right]\cdot 2\,a\cos^2{}^1\!/_2\,i\,\mathrm{d}\xi_1 \\
& - \left[\frac{\cos\gamma}{\Delta}\,\frac{r}{a}\cos(v+\pi)+\frac{\sin\gamma}{\Delta}\,\xi_1\,\frac{r}{a}\cos(v+\Gamma)\right]\cdot 2\,a\cos^2{}^1\!/_2\,i\,\mathrm{d}\eta_1 \\
\mathrm{d}\delta = {} & \frac{\sin\gamma'}{\Delta}\,h\cos(H+\Gamma')\cdot a\sec\varphi\,\mathrm{d}L_0 \\
& + \ldots
\end{aligned}
$$

Bei kleinen Werthen der Excentricität und der Neigung können die in ξ, η, ξ_1, η_1 multiplicirten Glieder weggelassen oder doch mit grosser Leichtigkeit berücksichtigt werden.

Stockholm, 1902 Mai 1. *K. Bohlin.*

La distribution de la lumière galactique comparée à celle des étoiles relativement brillantes, dans la Voie lactée boréale.[1]

Par *C. Easton.*

Dans les A. N. Bd. 137 No. 3270 j'ai publié les résultats d'une étude sur la distribution des étoiles, comparée à la distribution de la lumière galactique, dans deux régions peu étendues de la Voie lactée boréale, situées dans le Cygne et dans l'Aigle. Il m'a paru désirable d'étendre cette comparaison sur toute la Voie lactée boréale. Cependant, comme nous ne sommes pas toujours en possession de données complètes, embrassant cette zone entière, pour les étoiles plus faibles que la grandeur 9.5 ou 10, et que, d'autre part, le degré de précision qu'on peut obtenir avec la BD. est très restreint, j'ai cru devoir me borner à comparer entre elles des divisions beaucoup plus grandes de la zone, et de ne grouper les étoiles d'Argelander que dans quatre groupes très nombreux, dont le I^r embrasse les étoiles plus brillantes que la grandeur 6.6 Arg., le II^d mag. 6.6–8.0, le III^e mag. 8.1–9.0, le IV^e toutes les étoiles plus faibles que 9.0 dans la BD. Pour cette comparaison, la zone galactique boréale entre $-18°$ lat. gal. et $+18°$ lat. gal. fut divisée en des rectangles mesurant 4° en latitude et 15° en longitude galactique (108 rectangles); la position du pole nord galactique a été adoptée selon Marth: $\alpha = 12^h\,40^m$, $\delta = +30°$, Ep. 1880.

Pour obtenir des valeurs numériques, représentant l'intensité de la lumière galactique dans chacun de ces rectangles, j'ai d'abord tracé, sur une projection galactique de Marth[2]) des lignes isophotiques indiquant les endroits où la lueur galactique a l'intensité a, b ... f, a étant l'intensité la plus faible, f l'intensité la plus forte, les intervalles étant supposés égaux. Pour une personne accoutumée aux observations de la Voie lactée, on a le droit d'admettre que la différence logarithmique entre ces intervalles sera à peu près constante. Ainsi, quand on appelle i l'intensité des endroits les plus faibles (Schwellenwerth) et d l'intervalle entre deux intensités consécutives, on obtient pour les intensités a ... f:

a	b	c	d	e	f
i	$i\,d$	$i\,d^2$	$i\,d^3$	$i\,d^4$	$i\,d^5$

La connaissance d'i importe peu; d devra être déterminé par une méthode photométrique quelconque.

Mes essais d'une méthode photométrique directe n'ayant donné aucun résultat satisfaisant, j'ai pris une voie différente. J'ai supposé que la quantité totale de lumière galactique reçue par notre rétine était, pour un endroit quelconque de la Voie lactée, proportionnelle à la quantité totale de lumière émise par les étoiles (plus faibles que la grandeur 6.5) visibles dans ce même endroit sur une plaque photographique à longue exposition. En comparant deux régions assez rapprochées, de superficie égale, et d'un éclat galactique très différent — j'ai choisi, sur une plaque du prof. Max Wolf (Heidelberg Nr. 884) une région au sud de γ Cygni et une autre au sud-ouest de cette étoile — on évite suffisamment les objections contre cette méthode, fondées sur l'impossibilité d'évaluer proprement les grandeurs stellaires sur une plaque photographique.

[1]) Résumé d'un travail plus détaillé qui sera publié sous peu par l'Académie royale des Sciences à Amsterdam.
[2]) Les données pour cette projection ont été publiées par A. Marth dans les Monthly Notices LIII, 2 et 6.